

# 《数学分析》考试大纲

## 一、考试的总体要求

数学分析是一门具有公共性质的重要的数学基础课程，由分析基础、一元微分学和积分学、级数、多元微分学和积分学等部分组成。要求考生比较系统地理解数学分析的基本概念和基本理论，掌握数学分析的基本思想和方法。要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

## 二、考试的内容（标注\*号的章节内容只作了解要求）

### （一）实数集与函数

1、实数：实数的概念，实数的性质，绝对值与不等式；

2、数集、确界原理：区间与邻域，有界集与无界集，上确界与下确界，确界原理；

3、函数概念：函数的定义，函数的表示法(解析法、列表法、和图象法)，分段函数；

4、具有某些特征的函数：有界函数，单调函数，奇函数与偶函数，周期函数。

**要求：**了解数学的发展史与实数的概念，理解绝对值不等式的性质，会解绝对值不等式；弄清区间和邻域的概念，理解确界概念、确界原理，会利用定义证明一些简单数集的确界；掌握函数的定义及函数的表示法，了解函数的运算；理解和掌握一些特殊类型的函数。

## (二) 数列极限

- 1、极限概念；
- 2、收敛数列的性质：唯一性，有界性，保号性，单调性；
- 3、数列极限存在的条件：单调有界准则，迫敛性法则，柯西准则。

**要求：**逐步透彻理解和掌握数列极限的概念；掌握并能运用  $\epsilon$ - $N$  语言处理极限问题；掌握收敛数列的基本性质和数列极限的存在条件(单调有界函数和迫敛性定理)，并能运用；了解数列极限柯西准则,了解子列的概念及其与数列极限的关系；了解无穷小数列的概念及其与数列极限的关系。

## (三) 函数极限

- 1、函数极限的概念，单侧极限的概念；
- 2、函数极限的性质：唯一性，局部有界性，局部保号性，不等式性，迫敛性；
- 3、函数极限存在的条件：归结原则（Heine 定理），柯西准则；
- 4、两个重要极限；
- 5、无穷小量与无穷大量，阶的比较。

**要求：**理解和掌握函数极限的概念；掌握并能应用  $\epsilon$ - $\delta$ ,  $\epsilon$ - $X$  语言处理极限问题；了解函数的单侧极限，函数极限的柯西准则；掌握函数极限的性质和归结原则；熟练掌握两个重要极限处理极限问题。

#### (四) 函数连续

1、函数连续的概念：一点连续的定义，区间连续的定义，单侧连续的定义，间断点及其分类；

2、连续函数的性质：局部性质及运算，闭区间上连续函数的性质（最大最小值性、有界性、介值性、一致连续性），复合函数的连续性，反函数的连续性\*；

3、初等函数的连续性。

**要求：**理解与掌握一元函数连续性、一致连续性的定义及其证明，理解与掌握函数间断点及其分类，连续函数的局部性质；理解单侧连续的概念；能正确叙述和简单应用闭区间上连续函数的性质；了解反函数的连续性，理解复合函数的连续性，初等函数的连续性。

#### (五) 导数与微分

1、导数概念：导数的定义、单侧导数、导函数、导数的几何意义；

2、求导法则：导数公式、导数的运算(四则运算)、求导法则（反函数的求导法则，复合函数的求导法则，隐函数的求导法则，参数方程的求导法则）；

3、微分：微分的定义，微分的运算法则，微分的应用；

4、高阶导数与高阶微分。

**要求：**理解和掌握导数与微分概念，了解它的几何意义；能熟练地运用导数的运算性质和求导法则求函数的导数；理解单侧

导数、可导性与连续性的关系，高阶导数的求法；了解导数的几何应用，微分在近似计算中的应用。

### （六）微分学基本定理

1、中值定理：罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理\*；

2、几种特殊类型的不定式极限与罗比塔法则；

3、泰勒公式。

**要求：**掌握中值定理的内容、证明及其应用；了解泰勒公式及在近似计算中的应用，能够把某些函数按泰勒公式展开；能熟练地运用罗必达法则求不定式的极限

### （七）导数的应用

1、函数的单调性与极值；

2、函数凹凸性与拐点。

**要求：**了解和掌握函数的某些特性(单调性、极值与最值、凹凸性、拐点)及其判断方法，能利用函数的特性解决相关的实际问题。

### （八）实数完备性定理及应用

1、实数完备性六个等价定理：闭区间套定理、单调有界定理、柯西收敛准则、确界存在定理、聚点定理、有限覆盖定理；

2、闭区间上连续函数整体性质的证明：有界性定理的证明，最大最小值性定理的证明，介值性定理的证明，一致连续性定理的证明；

## (九) 不定积分

- 1、不定积分概念；
- 2、换元积分法与分部积分法；
- 3、几类可化为有理函数的积分；

**要求：**理解原函数和不定积分概念；熟练掌握换元积分法、分部积分法、有理式积分法、简单无理式和三角有理式积分法。

## (十) 定积分

1、定积分的概念：概念的引入、黎曼积分定义，函数可积的必要条件；

2、可积性条件：可积的必要条件和充要条件，达布上和与达布下和，可积函数类(连续函数，只有有限个间断点的有界函数，单调函数)；

3、微积分学基本定理：可变上限积分，牛顿-莱布尼兹公式；

4、非正常积分：无穷积分收敛与发散的概念，审敛法（柯西准则，比较法，狄利克雷与阿贝尔判别法）；瑕积分的收敛与发散的概念，收敛判别法。

**要求：**理解定积分概念及函数可积的条件；熟悉一些可积分函数类，会一些较简单的可积性证明；掌握定积分与可变上限积分的性质；能较好地运用牛顿-莱布尼兹公式，换元积分法，分部积分法计算一些定积分。掌握广义积分的收敛、发散、绝对收敛与条件收敛等概念；能用收敛性判别法判断某些广义积分的收敛性。

## (十一) 定积分的应用

1、定积分的几何应用：平面图形的面积，微元法，已知截面面积函数的立体体积，旋转体的体积平面曲线的弧长与微分，曲率；

2、定积分在物理上的应用\*：功、液体压力、引力。

**要求：**理解并掌握"微元法"；重点掌握定积分的几何应用；了解定积分在物理上的应用。

## (十二) 数项级数

1、级数的敛散性：无穷级数收敛，发散等概念，柯西准则，收敛级数的基本性质；

2、正项级数：比较原理，达朗贝尔判别法，柯西判别法，积分判别法；

3、一般项级数：交错级数与莱布尼兹判别法，绝对收敛级数与条件收敛级数及其性质，阿贝尔判别法与狄利克雷判别法。

**要求：**理解无穷级数的收敛、发散、绝对收敛与条件收敛等概念；掌握收敛级数的性质；能够应用正项级数与任意项级数的敛散性判别法判断级数的敛散性；熟悉几何级数调和级数与  $p$  级数。

## (十三) 函数项级数

1、一致收敛性及一致收敛判别法（柯西准则，优级数判别法，狄利克雷与阿贝尔判别法）；

2、一致收敛的函数列与函数项级数的性质（连续性，可积

性，可微性)。

**要求：**掌握收敛域、极限函数与和函数一致收敛等概念；掌握极限函数与和函数的分析性质(会证明)；能够比较熟练地判断一些函数项级数与函数列的一致收敛。

#### (十四) 幂级数

1、幂级数：阿贝尔定理，收敛半径与收敛区间，幂级数的一致收敛性，幂级数和函数的分析性质；

2、几种常见初等函数的幂级数展开与泰勒定理。

**要求：**了解幂级数，函数的幂级数及函数的可展成幂级数等概念；掌握幂级数的性质；会求幂级数的收敛半径与一些幂级数的收敛域；会把一些函数展开成幂级数，包括会用间接展开法求函数的泰勒展开式

#### (十五) 傅里叶级数

1、傅里叶级数：三角函数与正交函数系，傅里叶级数与傅里叶系数，以  $2\pi$  为周期函数的付里叶级数，收敛定理；

2、以  $2L$  为周期的傅里叶级数；

3、收敛定理的证明。

**要求：**理解三角函数系的正交性与函数的傅里叶级数的概念；掌握傅里叶级数收敛性判别法；能将一些函数展开成傅里叶级数；了解收敛定理的证明。

#### (十六) 多元函数极限与连续

1、平面点集与多元函数的概念；

2、二元函数的极限、累次极限；

3、二元函数的连续性：二元函数的连续性概念、连续函数的局部性质及初等函数连续性。

**要求：**理解平面点集、多元函数的基本概念；理解二元函数的极限、累次极限、连续性概念，会计算一些简单的二元函数极限；了解闭区域套定理，有限覆盖定理，多元连续函数的性质。

### （十七）多元函数的微分学

1、可微性：偏导数的概念，偏导数的几何意义，偏导数与连续性；全微分概念；连续性与可微性，偏导数与可微性；

2、多元复合函数微分法及求导公式；

3、方向导数与梯度；

4、泰勒定理与极值。

**要求：**理解并掌握偏导数、全微分、方向导数、高阶偏导数及极值等概念及其计算；弄清全微分、偏导数、连续之间的关系；了解泰勒公式；会求函数的极值、最值。

### （十八）隐函数定理及其应用

1、隐函数：隐函数的概念，隐函数的定理，隐函数求导举例；

2、隐函数组：隐函数组存在定理，反函数组与坐标变换，雅可比行列式；

3、几何应用：平面曲线的切线与法线，空间曲线的切线与法平面，曲面的切平面和法线；条件极值：条件极值的概念，条

件极值的必要条件。

**要求：**了解隐函数的概念及隐函数的存在定理，会求隐函数的导数；了解隐函数组的概念及隐函数组定理，会求隐函数组的偏导数；会求曲线的切线方程，法平面方程，曲面的切平面方程和法线方程；了解条件极值概念及求法。

### (十九) 重积分

1、二重积分概念：二重积分的概念，可积条件，可积函数，二重积分的性质；

2、二重积分的计算：化二重积分为累次积分，换元法（极坐标变换，一般变换）；

3、含参变量的积分；

4、三重积分计算：化三重积分为累次积分，换元法（一般变换，柱面坐标变换，球坐标变换）；

5、重积分应用：立体体积，曲面的面积；物体的重心、转动惯量\*；

6、含参量非正常积分概念及其一致敛性：含参变量非正常积分及其一致收敛性概念，一致收敛的判别法(柯西准则，与函数项级数一致收敛性的关系，一致收敛的  $M$  判别法)，含参变量非正常积分的分析性质；

**要求：**了解含参变量定积分的概念与性质；熟练掌握二重、三重积分的概念、性质、计算，掌握重积分的几何应用，了解重积分的物理应用；了解含参变量非正常积分的收敛与一致收敛的

概念；理解含参变量非正常积分一致收敛的判别定理，并掌握它们的应用。

## （二十） 曲线积分与曲面积分

1、第一型曲线积分的概念、性质与计算，第一型曲面积分的概念、性质与计算；

2、第二型曲线积分的概念、性质与计算，变力作功，两类曲线积分的联系；

3、格林公式，曲线积分与路线的无关性，全微分；

4、第二型曲面积分概念及性质与计算，两类曲面积分的关系；

5、高斯公式，斯托克斯公式，空间曲线积分与路径无关性；

**要求：**掌握两类曲线积分与曲面积分的概念、性质及计算；了解两类曲线积分的关系和两类曲面积分的关系；熟练掌握格林公式的证明及其应用，会利用高斯公式、斯托克斯公式计算一些曲面积分与曲线积分。

## 三、考试题型及比例

计算题： 60%左右；

证明题： 40%左右。

## 四、考试形式及时间

考试形式为闭卷笔试，试卷总分为 150 分，考试时间为三小时。

## 五、主要参考教材

教材：《数学分析》第四版，华东师范大学编著，上、下册，高等教育出版社，2010年7月。

参考书：《数学分析》第二版，复旦大学数学系，陈传璋等，1983年7月。

《数学分析讲义》，北京：高等教育出版社，刘玉琏、傅沛仁编，1992年6月第3版。

《数学分析学习指导书》上、下册，吴良森等编，高等教育出版社，2004年9月。