《数学分析》考试大纲

一、考试的总体要求

数学分析是一门具有公共性质的重要的数学基础课程，由分析基础、一元微分学和积分学、级数、多元微分学和积分学等部分组成。要求考生比较系统地理解数学分析的基本概念和基本理论，掌握数学分析的基本思想和方法。要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

二、考试内容及考核要求

（一）实数集与函数

考试内容

1. 实数：实数的概念，实数的性质，绝对值与不等式。

2. 数集、确界原理：区间与邻域，有界集与无界集，上确界与下确界，确界原理。

3. 函数概念：函数的定义，函数的表示法（解析法、列表法、和图象法），分段函数。

4. 具有某些特征的函数：有界函数，单调函数，奇函数与偶函数，周期函数。

考核要求

1. 了解数学的发展史与实数的概念。

2. 理解绝对值不等式的性质，会解绝对值不等式。

3. 弄清区间和邻域的概念，理解确界概念、确界原理，会利用定义证明一些简单数集的确界。

4. 掌握函数的定义及函数的表示法，了解函数的运算。

5. 理解和掌握一些特殊类型的函数。

（二）数列极限

考试内容

1. 极限概念。

2. 收敛数列的性质：唯一性，有界性，保号性，单调性。

3. 数列极限存在的条件：单调有界准则，迫敛性法则，柯西准则。

考核要求

1. 逐步透彻理解和掌握数列极限的概念。

2. 掌握并能运用$\varepsilon-N$语言处理极限问题。

3. 掌握收敛数列的基本性质和数列极限的存在条件（单调有界函数和迫敛性定理），并能运用。

4. 了解数列极限柯西准则，了解子列的概念及其与数列极限的关系。

5. 了解无穷小数列的概念及其与数列极限的关系。

(三) 函数极限

考试内容

1. 函数极限的概念，单侧极限的概念。

2. 函数极限的性质：唯一性，局部有界性，局部保号性，

不等式性，迫敛性。

3. 函数极限存在的条件：归结原则（Hein 定理），柯西准则。

4. 两个重要极限。

5. 无穷小量与无穷大量，阶的比较。

考核要求

1. 理解和掌握函数极限的概念。

2. 掌握并能应用$\varepsilon-\delta$，$\varepsilon-X$语言处理极限问题。

3. 了解函数的单侧极限，函数极限的柯西准则。

4. 掌握函数极限的性质和归结原则。

5. 熟练掌握两个重要极限处理极限问题。

(四) 函数连续

考试内容

1. 函数连续的概念：一点连续的定义，区间连续的定义，单侧连续的定义，间断点及其分类。

2. 连续函数的性质：局部性质及运算，闭区间上连续函数的性质（最大最小值性、有界性、介值性、一致连续性），复合函数的连续性，反函数的连续性。

3. 初等函数的连续性。

考核要求

1. 理解与掌握一元函数连续性、一致连续性的定义及其证明，理解与掌握函数间断点及其分类，连续函数的局部性质。

2. 理解单侧连续的概念；能正确叙述和简单应用闭区间上

连续函数的性质。

3. 了解反函数的连续性，理解复合函数的连续性，初等函数的连续性。

（五） 导数与微分

考试内容

1. 导数概念：导数的定义、单侧导数、导函数、导数的几何意义。

2. 求导法则：导数公式、导数的运算（四则运算）、求导法则（反函数的求导法则，复合函数的求导法则，隐函数的求导法则，参数方程的求导法则）。

3. 微分：微分的定义，微分的运算法则，微分的应用。

4. 高阶导数与高阶微分。

考核要求

1. 理解和掌握导数与微分概念，了解它的几何意义。

2. 能熟练地运用导数的运算性质和求导法则求函数的导数。

3. 理解单侧导数、可导性与连续性的关系，高阶导数的求法。

4. 了解导数的几何应用，微分在近似计算中的应用。

（六） 微分学基本定理

考试内容

1. 中值定理：罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中

值定理。

2. 几种特殊类型的不定式极限与洛必达法则。

3. 泰勒公式。

考核要求

1. 掌握罗尔中值定理、拉格朗日中值定理的内容、证明及其应用，了解柯西中值定理的内容、证明及其应用。

2. 了解泰勒公式及在近似计算中的应用，能够把某些函数按泰勒公式展开。

3. 能熟练地运用洛必达法则求不定式的极限。

（七） 导数的应用

考试内容

1. 函数的单调性与极值。

2. 函数凹凸性与拐点。

考核要求

掌握函数的某些特性（单调性、极值与最值、凹凸性、拐点）及其判断方法，能利用函数的特性解决相关的实际问题。

（八） 实数完备性定理及应用

考试内容

1. 实数完备性六个等价定理：闭区间套定理、单调有界定理、柯西收敛准则、确界存在定理、聚点定理、有限覆盖定理。

2. 闭区间上连续函数整体性质的证明：有界性定理的证明，最大小值性定理的证明，介值性定理的证明，一致连续性定理的

证明。

考核要求

1. 掌握单调有界定理、柯西收敛准则。

2. 了解闭区间套定理、确界存在定理、聚点定理、有限覆盖定理。

2. 掌握闭区间上连续函数整体性质的证明。

（九） 不定积分

考试内容

1. 不定积分概念。

2. 换元积分法与分部积分法。

3. 几类可化为有理函数的积分。

考核要求

1. 理解原函数和不定积分概念。

2. 熟练掌握换元积分法、分部积分法、有理式积分法、简单无理式和三角有理式积分法。

（十） 定积分

考试内容

1. 定积分的概念：概念的引入、黎曼积分定义，函数可积的必要条件。

2. 可积性条件：可积的必要条件和充要条件，达布上和与达布下和，可积函数类（连续函数，只有有限个间断点的有界函数，单调函数）。

3. 微积分学基本定理：可变上限积分，牛顿-莱布尼兹公式。

4. 非正常积分：无穷积分收敛与发散的概念，审敛法（柯西准则，比较法，狄利克雷与阿贝尔判别法）；瑕积分的收敛与发散的概念，收敛判别法。

考核要求

1. 理解定积分概念及函数可积的条件。

2. 熟悉一些可积分函数类，会一些较简单的可积性证明。

3. 掌握定积分与可变上限积分的性质。

4. 能较好地运用牛顿-莱布尼兹公式，换元积分法，分部积分法计算一些定积分。

5. 掌握广义积分的收敛、发散、绝对收敛与条件收敛等概念；能用收敛性判别法判断某些广义积分的收敛性。

（十一） 定积分的应用

考试内容

1. 定积分的几何应用：平面图形的面积，微元法，已知截面面积函数的立体体积，旋转体的体积平面曲线的弧长与微分，曲率。

2. 定积分在物理上的应用：功、液体压力、引力。

考核要求

1. 理解并掌握"微元法"。

2. 重点掌握定积分的几何应用。

3. 了解定积分在物理上的应用。

（十二） 数项级数

考试内容

1. 级数的敛散性：无穷级数收敛，发散等概念，柯西准则，收敛级数的基本性质。

2. 正项级数：比较原理，达朗贝尔判别法，柯西判别法，积分判别法。

3. 一般项级数：交错级数与莱布尼兹判别法，绝对收敛级数与条件收敛级数及其性质，阿贝尔判别法与狄利克雷判别法。

考核要求

1. 理解无穷级数的收敛、发散、绝对收敛与条件收敛等概念；掌握收敛级数的性质。

2. 能够应用正项级数与任意项级数的敛散性判别法判断级数的敛散性。

3. 熟悉几何级数调和级数与 p 级数。

（十三） 函数项级数

考试内容

1. 一致收敛性及一致收敛判别法（柯西准则，优级数判别法，狄利克雷与阿贝尔判别法）。

2. 一致收敛的函数列与函数项级数的性质（连续性，可积性，可微性）。

考核要求

1. 掌握收敛域、极限函数与和函数一致收敛等概念。

2. 掌握极限函数与和函数的分析性质（会证明）。

3. 能够比较熟练地判断一些函数项级数与函数列的一致收敛。

（十四） 幂级数

考试内容

1. 幂级数：阿贝尔定理，收敛半径与收敛区间，幂级数的一致收敛性，幂级数和函数的分析性质。

2. 几种常见初等函数的幂级数展开与泰勒定理。

考核要求

1. 了解幂级数，函数的幂级数及函数的可展成幂级数等概念。

2. 掌握幂级数的性质。

3. 会求幂级数的收敛半径与一些幂级数的收敛域。

4. 会把一些函数展开成幂级数，包括会用间接展开法求函数的泰勒展开式。

（十五） 傅里叶级数

考试内容

1. 傅里叶级数：三角函数与正交函数系，傅里叶级数与傅里叶系数，以 2π 为周期函数的傅里叶级数，收敛定理。

2. 以 $2L$ 为周期的傅里叶级数。

3. 收敛定理的证明。

考核要求

1. 理解三角函数系的正交性与函数的傅里叶级数的概念。

2. 掌握傅里叶级数收敛性判别法。

3. 能将一些函数展开成傅里叶级数。

4. 了解收敛定理的证明。

（十六） 多元函数极限与连续

考试内容

1. 平面点集与多元函数的概念。

2. 二元函数的极限、累次极限。

3. 二元函数的连续性：二元函数的连续性概念、连续函数的局部性质及初等函数连续性。

考核要求

1. 理解平面点集、多元函数的基本概念。

2. 理解二元函数的极限、累次极限、连续性概念，会计算一些简单的二元函数极限。

3. 了解二元连续函数的性质。

（十七） 多元函数的微分学

考试内容

1. 可微性：偏导数的概念，偏导数的几何意义，偏导数与连续性；全微分概念；连续性与可微性，偏导数与可微性。

2. 多元复合函数微分法及求导公式。

3. 方向导数与梯度。

4. 泰勒定理与极值。

考核要求

1. 理解并掌握偏导数、全微分、方向导数、高阶偏导数及极值等概念及其计算。

2. 弄清全微分、偏导数、连续之间的关系；了解泰勒公式。

3. 会求函数的极值、最值。

（十八） 隐函数定理及其应用

考试内容

1. 隐函数：隐函数的概念，隐函数的定理，隐函数求导举例。

2. 隐函数组：隐函数组存在定理，反函数组与坐标变换，雅可比行列式。

3. 几何应用：平面曲线的切线与法线，空间曲线的切线与法平面，曲面的切平面和法线；条件极值：条件极值的概念，条件极值的必要条件。

考核要求

1. 了解隐函数的概念及隐函数的存在定理，会求隐函数的导数。

2. 了解隐函数组的概念及隐函数组定理，会求隐函数组的偏导数。

3. 会求曲线的切线方程，法平面方程，曲面的切平面方程和法线方程。

4. 了解条件极值概念及求法。

（十九） 重积分

考试内容

1. 二重积分概念：二重积分的概念，可积条件，可积函数，二重积分的性质。

2. 二重积分的计算：化二重积分为累次积分，换元法（极坐标变换，一般变换）。

3. 含参变量的积分。

4. 三重积分计算：化三重积分为累次积分，换元法（一般变换，柱面坐标变换，球坐标变换）。

5. 重积分应用：立体体积，曲面的面积；物体的重心、转动惯量*。

6. 含参量非正常积分概念及其一致敛性：含参变量非正常积分及其一致收敛性概念，一致收敛的判别法（柯西准则，与函数项级数一致收敛性的关系，一致收敛的 M 判别法），含参变量非正常积分的分析性质。

考核要求

1. 了解含参变量定积分的概念与性质。

2. 熟练掌握二重、三重积分的概念、性质、计算，掌握重积分的几何应用，了解重积分的物理应用。

3. 了解含参变量非正常积分的收敛与一致收敛的概念。

4. 理解含参变量非正常积分一致收敛的判别定理，并掌握

它们的应用。

（二十） 曲线积分与曲面积分

考试内容

1. 第一型曲线积分的概念、性质与计算，第一型曲面积分的概念、性质与计算。

2. 第二型曲线积分的概念、性质与计算，变力作功，两类曲线积分的联系。

3. 格林公式，曲线积分与路线的无关性，全微分。

4. 第二型曲面积分概念及性质与计算，两类曲面积分的关系。

5. 高斯公式，斯托克斯公式，空间曲线积分与路径无关性。

考核要求

1. 掌握两类曲线积分与曲面积分的概念、性质及计算。

2. 了解两类曲线积分的关系和两类曲面积分的关系。

3. 熟练掌握格林公式的证明及其应用，会利用高斯公式、斯托克斯公式计算一些曲面积分与曲线积分。

三、考试题型及比例

计算题：60%左右；

证明题：40%左右。

四、考试形式及时间

考试形式为闭卷笔试，试卷总分值为 150 分，考试时间为三小时。

五、主要参考教材

《数学分析》（第四版），华东师范大学编著，上、下册，高等教育出版社，2010 年 7 月。